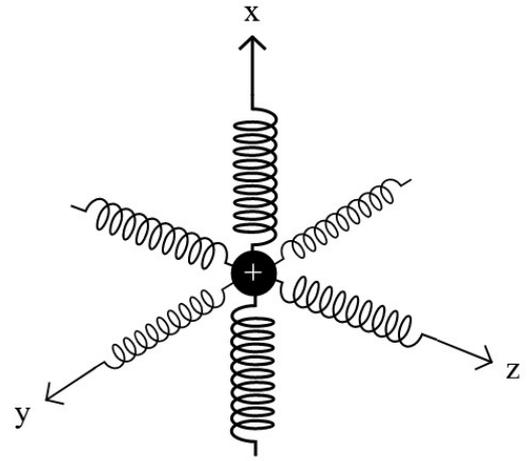


1.) Das Lorentz-Modell

- Modell zur Beschreibung der Polarisation eines Materials
- die im Kristall gebundenen Elektronen werden als Oszillatoren beschrieben die durch ein externes elektrisches Feld angeregt werden können
- mit Newton II können wir für die Auslenkung \vec{d} folgende DGL aufstellen

$$m \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}}_{\text{Massenträgheit}} \vec{d} + m \underbrace{\gamma}_{\text{Dämpfung}} \frac{d}{dt} \vec{d} + m \underbrace{\omega_0^2}_{\text{Rückstellkraft des Kerns}} \vec{d} = \underbrace{q \vec{E}}_{\text{optische Quelle}}$$



ω_0 - Eigenfrequenz
 γ - Dämpfungsrate
 m - Elektronenmasse

- das Dipolmoment ist nun: $\vec{p} = q \vec{d}$
 \hookrightarrow Polarisation: multiplizieren mit der Dipoldichte $\vec{P} = n \vec{p}$

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] \vec{P}(t) = \frac{q^2}{m} n \vec{E}(t) \quad \left| \text{FT}(\dots) \right.$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{\vec{P}}(\omega) = \frac{q^2 n}{m} \tilde{\vec{E}}(\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{P}}(\omega) = \frac{\epsilon_0 f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tilde{\vec{E}}(\omega)} \quad \text{mit } f = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 m}$$

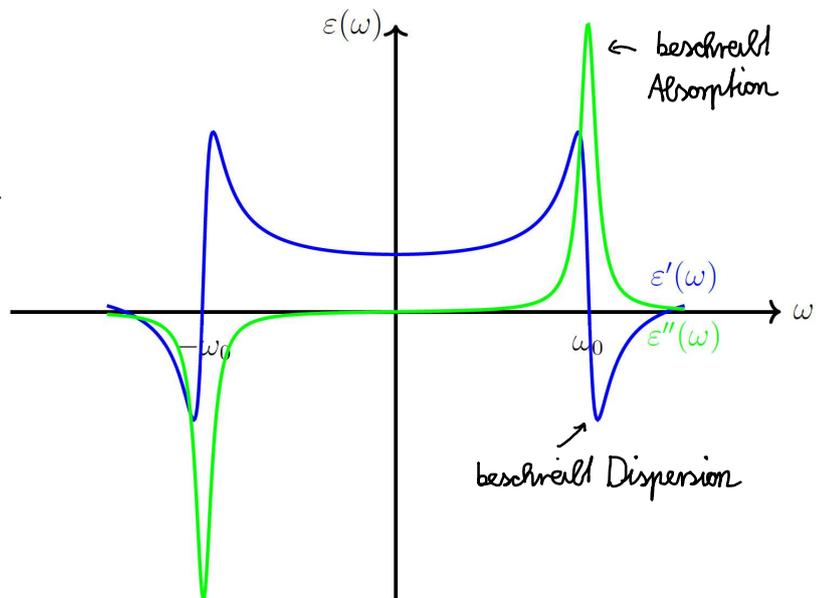
Mit $\tilde{\vec{P}} = \epsilon_0 \chi \tilde{\vec{E}}$ erhalten wir für die Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Daraus folgt dann die Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}_{\epsilon'(\omega)} + i \underbrace{\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}_{\epsilon''(\omega)} = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega) \end{aligned}$$

- es zeigt sich: $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$
 - ↳ Real / Imaginärteil ist symmetrisch / antisymmetrisch
- Absorption nur in der Nähe von Resonanzen
 - ↳ nicht-verschwindender Imaginärteil
- starke Dispersion (Frequenzabhängigkeit) in der Nähe von Resonanzen!



⇒ Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion?
 → Kramers Kronic Relationen Kap. 1.6

Zeige, dass ϵ'' Absorption im Material beschreibt:

• Beziehung zwischen $\hat{n} = n + ik$ und $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ $\hat{n}^2 = \epsilon \Rightarrow \begin{cases} \epsilon' = n^2 - k^2 \\ \epsilon'' = 2nk \sim k \end{cases}$

$$\Delta \vec{E} + \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{+i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} z} = \vec{E}_0 e^{i \frac{\omega}{c} (n + ik) z}$$

$$= \underbrace{\vec{E}_0 e^{i \frac{\omega}{c} n z}}_{\text{Schwingung}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\omega}{c} k z}}_{\text{exponentielle Dämpfung}}$$

$I \propto |\vec{E}|^2 \Rightarrow I = I_0 e^{-2 \frac{\omega}{c} k z} = I_0 e^{-\alpha z}$ Lambert-Beer Gesetz
 mit dem Absorptionskoeffizienten $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} k = \frac{\omega}{nc} \epsilon''$

2. Sellmeier Gleichung

- für reale Materialien treten meist mehrere Resonanzen auf.
 - ↳ Bilde Summe über die Resonanzfrequenzen

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sum_m \frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2 - i \gamma_m \omega}$$

in Gebieten schwacher Dämpfung (transparente Bereiche) gilt: $\gamma \approx 0$

$$\Rightarrow \epsilon'(\omega) = 1 + \sum_m \frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2} \quad \epsilon' = n^2 - k^2 \approx n^2 \text{ für } k \approx 0$$

$$n^2 = 1 + \sum_m \frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2} = 1 + \sum_m \underbrace{\tilde{f}_m}_{B_m} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \underbrace{\lambda_m^2}_{C_m}} \quad \left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda_m^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\lambda_m^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{n^2 = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \dots} \quad \text{Sellmeier - Gleichung}$$

Anwendung: Fit Funktion zur Interpolation von gemessenen Brechzahlen

Beispiel: Quarzglas (fused silica)

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - (0.0684043 \mu\text{m})^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - (0.1162414 \mu\text{m})^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161 \mu\text{m})^2}}$$

↳ Koeffizienten üblicherweise in μm angegeben

Beobachtungen:

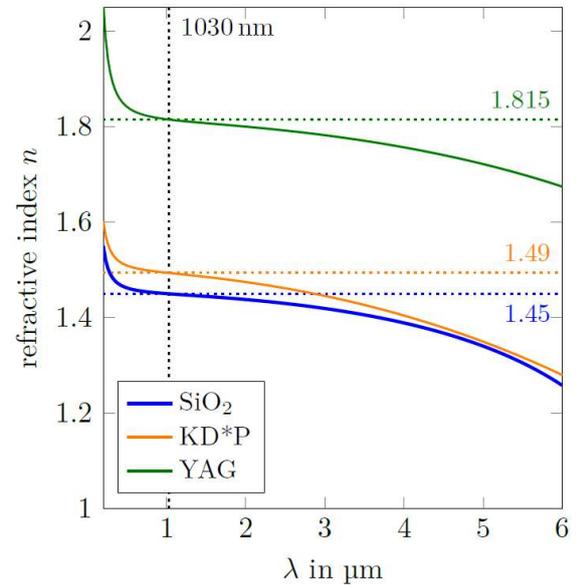
- Brechzahl sinkt für größere Wellenlängen
→ normale Dispersion
- rotes Licht breitet sich schneller aus als Blaues
- blaues Licht wird stärker gebrochen

Merksatz: „Blau bricht stärker“

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \quad \frac{dn}{d\omega} > 0$$

- Hilfreiche Seite zum Nachschauen von Brechzahlen:

<https://refractiveindex.info/>



3. Lorentz-Modell für Metalle

- Elektronen sind im Metall von den Atomrümpfen losgelöst und frei beweglich
↳ keine Rückstellkraft $m\omega_0^2 d$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{d}}{dt} = q\vec{E}$$

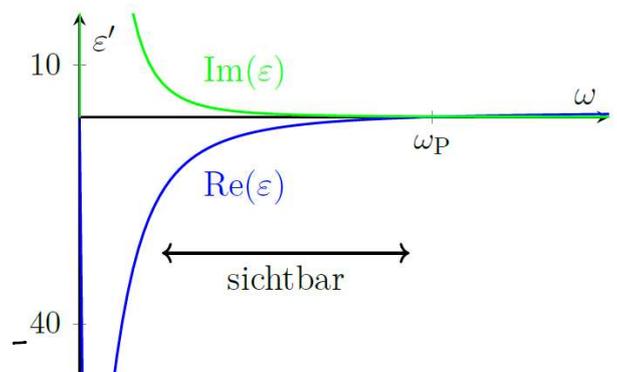
- Für die Suszeptibilität folgt: $\chi(\omega) = -\frac{q^2 n}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$

$$\omega_p^2 = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 m} \quad \text{Plasmafrequenz}$$

$$\rightarrow \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \underbrace{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}}_{\epsilon'} + i \underbrace{\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3 + \gamma^2\omega}}_{\epsilon''}$$

für $\omega < \omega_p$ ist $\epsilon < 0$

- ↳ exponentielle Dämpfung der Wellen
- ↳ Totalreflexion an Metallplatten
- ↳ Konstruktion von Spiegeln (Silber)



Beispiel: Silber @ $1 \mu\text{m}$: $\epsilon' = -49$
 $\epsilon'' = 5$
 $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 330 \text{ nm}$

Physikalischer Hintergrund:

- freibewegliche Elektronen im Metall folgen dem optischen Feld
- Abschirmung des Feldes
- für $\omega > \omega_p$ können die e^- dem optischen Feld nicht mehr folgen, die Abschirmung bricht zusammen